Kolokwium z Topologii II 26 V 2023

Każdą oddawaną kartkę proszę czytelnie podpisać.

Proszę dawać wyczerpujące wyjaśnienia i uzasadnienia, umożliwiające śledzenie toku rozumowania.

Proszę wybrać z poniższych sześciu zadań **cztery**, zaliczane do kolokwium; każde może przynieść do 20p. Pozostałe zadania też wolno rozwiązywać, co da nieduże punkty poza kolokwium.

1. Niech przekształcenia $f, g : S^1 \to S^1$ mają różny stopień. Dowieść, że $f(z) = g(z)$ dla pewnego $z \in S^1$.

2. a) Podać definicję indeksu pętli $f : S^1 \to \mathbb{C}$ względem punktu i definicję stopnia przekształcenia $f : S^1 \to S^1$.

b) Podać definicję wypchnięcia diagramu $G_1 \xleftarrow{u_1} G_0 \xrightarrow{u_2} G_2$, gdzie G_0, G_1, G_2 są grupami, a u_1 i u_2 ich homomorfizmami. Dowieść też jego jednoznaczności z dokładnością do izomorfizmu (w tym wyjaśnić, co ona oznacza).

c) Dowieść, że konkatenacja ścieżek ma następującą własność skracania: jeśli $\lambda_1 \star \mu_1 \sim_\partial \lambda_2 \star \mu_2$ i $\lambda_1 \sim_\partial \lambda_2$, to $\mu_1 \sim_\partial \mu_2$. (Dziedziną wszystkich ścieżek jest I; zakładamy, że konkatenacje mają sens.)

3. Na okregu S^1 obieramy ciąg punktów $p_n := (\cos(1/n), \sin(1/n))$, zbieżny do $p_0 := (1, 0)$. Przez Z oznaczmy zbiór $\bigcup_{n=0}^{\infty}[(0,0), p_n]$, traktowany jako podprzestrzeń płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. (Tu $[(0,0), p] = \{tp : t \in [0,1]\}$ oznacza odcinek o końcach $(0,0)$ i p.)

a) Udowodnić, że Z nie jest retraktem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, lecz jest nim każda podprzestrzeń $Z_n = \bigcup_{1 \le k \le n}[(0,0), p_n]$, dla $n \ge 1$.

b) Dowieść, że Z ma własność punktu stałego, tzn. dla każdego przekształcenia $f : Z \to Z$ zachodzi $f(z) = z$ dla pewnego $z \in Z$.

c) Czy $\{p_0\}$ jest silnym retraktem deformacyjnym przestrzeni Z?

4. Z przestrzeni $\mathbb{R}^3$ usunięto dwie przecinające się proste, uzyskując podprzestrzeń A.

a) Dowieść, że jej silnym retraktem deformacyjnym jest sfera bez 4 punktów.

b) Znaleźć jednowymiarowy wielościan, homotopijnie równoważny przestrzeni A.

c) Wyznaczyć $\pi_1(A)$.

5. Niech p będzie punktem krzywej Jordana J, zaś γ pętlą w ograniczonej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus J$. Dowieść, że $\operatorname{ind}(\gamma, p) = 0$.

6. Wyznaczyć $\pi_1(S^2/A)$, gdzie S^2 jest 2-sferą, $A \subset S^2$ jest zbiorem o pięciu elementach i S^2/A jest przestrzenią ilorazową.